Е. К. Липачёв (Казань)

Об обобщенных по Винеру решениях краевой задачи дифракции волн на областях с негладкой границей

Пусть $f(x)$ - кусочно гладкая функция, причем $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$ для некоторого вещественного $a > 0$. В области $S = \{(x, y) : y > f(x), -\infty < x < \infty\}$ рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S, \tag{1}$$

одному из граничных условий

$$u(P) = -u_0(P), \quad P = (x, y) \in \partial S \setminus \Omega, \quad \Omega = \{w_q\}_1^m, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}_P} = -\frac{\partial u_0(P)}{\partial \vec{n}_P}, \quad P = (x, y) \in \partial S \setminus \Omega, \tag{2'}$$

условию на ребре (см., например, [1]) в точках нарушения гладкости $w_q \in \partial S$, $q = 1, \dots, m$ и условию излучения на бесконечности

$$u^* = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u^*}{\partial r} - iku^* = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \tag{3}$$

где через $u_0(x, y) = e^{i(\alpha x - \beta y)} \cdot e^{-i\omega t}$ обозначено падающее поле с составляющими волнового вектора α и β, а $u^*(x, y) = u(x, y) + \zeta \widetilde{u}(x, y)$, $\widetilde{u}(x, y) = e^{i(\alpha x + \beta z)}$, $\zeta = 1$ в случае TE-поляризации и $\zeta = -1$ в случае TH-поляризации, через $\partial / \partial \vec{n}_P$ обозначена правильная нормальная производная.

Пусть S_j $(j = 1, 2, \dots)$ - последовательность областей с бесконечно гладкими границами, которая аппроксимирует область S, причем $S_j \subset S_{j+1} \subset S$. Это означает, что любая точка P из S при некотором j принадлежит S_j.

Определение 1. *Пусть краевая задача (1) - (3) разрешима в областях S_j $(j = 1, 2, \dots)$ и $\{u_j(P)\}_1^\infty$ - последовательность решений. Обобщенным по Винеру решением (см., например, [2])* *краевой задачи (1) - (3) в области S назовем функцию $u(P) = \lim_{j\to\infty} u_j(P)$, $P \in S$, если такой предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности областей.*

Определение 2. *Классическим решением краевой задачи (1) - (3) назовем функцию $u(P) \in C^2(S) \cap C\left(\overline{S \setminus \Omega_\delta}\right)$, удовлетворяющую в области S уравнению Гельмгольца, одному из граничных условий (2) или (2'), условию излучения (3) и условию на ребре в точках w_q, $q = \overline{1,m}$. Здесь через Ω_δ обозначено объединение произвольно малых δ - окрестностей точек w_q, $q = \overline{1,m}$.*

Согласно результатам, полученным ранее [3, 4], в случае достаточно гладких границ для краевой задачи (1) - (3) существует единственное классическое решение, причем это решение представимо в виде обобщенного потенциала простого или двойного слоя [5], в зависимости от поляризации задачи:

$$u_j(x,y) = \widetilde{u}(x,y) + U_{(\gamma_j,\varphi_j)}(x,y), \quad j = 1,2,\dots \tag{4}$$

где

$$U_{(\gamma_j,\varphi_j)}(x,y) = \int_{\gamma_j} \frac{\partial\, g_2(P_1,P_2)}{\partial\, \vec{n}_{P_2}} \varphi_j(\tau)\, ds_{P_2} \quad \text{в } TE \text{ - случае,} \tag{5}$$

$$U_{(\gamma_j,\varphi_j)}(x,y) = \int_{\gamma_j} g_1(P_1,P_2)\varphi_j(\tau)\, ds_{P_2}, \quad \text{в } TH \text{ - случае,} \tag{6}$$

через γ_j обозначены границы аппроксимирующей последовательности областей $\{S_j\}_1^\infty$, $\varphi_j \in \dot{C}[-a,a]$ и $g_m(P,P') = \frac{\pi i}{2}\left\{H_0^{(1)}(kr) - (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*)\right\}$ $(m = 1,2)$, где, в свою очередь, $H_0^{(1)}(z)$ - функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $P_1 = (x,y)$, $P_2 = (\tau,\xi)$, $r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y-\xi)^2}$, $r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y+\xi)^2}$.

Теорема 1. *При условии $\operatorname{Im} k \geq 0$ (и, дополнительно, условии $\operatorname{Re} k \neq 0$ в случае граничного условия (2')) существует обобщенное по Винеру решение $u(x,y)$ краевой задачи (1) - (3).*

Теорема 2. *В условиях теоремы 1, существует предел последовательности $\{\varphi_j\}_1^\infty$ плотностей обобщенных потенциалов (4)*

$$\varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j(x), \quad x \in [-a,a]. \tag{7}$$

Обобщенный потенциал, построенный по формуле (4), с заменой функции φ_j на φ и границы γ_j на γ^*, является решением краевой задачи (1) - (3), при этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$(K\varphi)(x) \equiv -\pi\varphi(x) + \int_\gamma h(P_1, P_2)\varphi(\tau)\, d\tau = g(x), \tag{8}$$

$$P_1 = (x, f(x)) \in \partial S \setminus \Omega,$$

где $h(P_1, P_2) = \partial g_m(P_1, P_2)/\partial \vec{n}_{P_m}$ *($m = 1$ в TH-случае и $m = 2$ в TE-случае), $h(P_1, P_2) = 0$, если $P_2 \in \Omega$, а при совпадении аргументов значение ядра равно половине кривизны гладкого участка границы, правая часть вычисляется по формуле* $g(x) = -u_0(x, f(x)) - \tilde{u}(x, f(x))$ *в TE-случае и* $g(x) = -\dfrac{\partial}{\partial \vec{n}_{P_1}}(u_0(x, f(x)) -)$ $(\tilde{u}(x, f(x)))$ *в TH-случае.*

Из теоремы 2 и свойств обобщенных потенциалов следует

Теорема 3. *В условиях теоремы 1, решение краевой задачи (1) - (3), построенное согласно схеме, указанной в формулировке теоремы 2, является классическим.*

Алгоритм приближенного решения краевой задачи построен на основе метода сплайн-подобластей для интегрального уравнения (8).

На отрезке $[-a, a]$ выбирается произвольная сетка узлов

$$-a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le a, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

удовлетворяющая условию $\delta_n = \max\limits_{1 \le j \le n}(x_j - x_{j-1}) \to 0, \quad n \to \infty$. Приближенное решение интегрального уравнения (8) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j s_j^l(x), \quad 0^0 = 1, \tag{10}$$

где $s_j^l(x)$ – фундаментальные сплайны степени l (см., например, [6]). Неизвестные коэффициенты c_j $(j = \overline{0^l, n})$ определяем из условий

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[(K\varphi_n^l)(x) - g(x) \right] dx = 0, \quad k = \overline{0^l, n}, \tag{11}$$

Условия (11) приводят к системе линейных алгебраических уравнений, так, например, в случае полигональных сплайнов имеем

$$\frac{c_{j-1}+c_j}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_k = \Phi_j(g), \quad j=\overline{1,n}, \quad (c_0 = c_n), \qquad (12)$$

где

$$a_{jk} = \Phi_j\left(\int_{x_{k-1}}^{a} h(P_1, P_2)\,d\tau\right),$$

$$\Phi_j(g) = \frac{1}{x_j - x_{j-1}}\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,dx, \quad j=\overline{1,n}.$$

Литература

[1] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974.

[2] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи матем. наук. – 1983. – Т. 38, No. 2. – С. 3 – 76.

[3] 3. Липачёв Е. К. О разрешимости задачи рассеяния на бесконечной решетке с конечной нарезкой // Материалы конф. "Алгебра и анализ". – Казань: Изд–во Казанск. матем. общества, 1997. – С. 135 – 136.

[4] Липачёв Е. К. Разрешимость краевой задачи дифракции волн на областях с кусочно-гладкой границей // Материалы конф. "Теория функций, ее прил. и смежные вопр." – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1999. – С.136–138.

[5] Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. – М.: Изд–во Московск. ун–та, 1989.

[6] Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд–во Казансг. ун–та, 1980.